

NUMERE IRAȚIONALE

Un scandal în inima matematicii

JORGE CALERO

BARTOLO LUQUE

Traducere de Mariana Stan

CUPRINS

Capitolul 0

O criză incommensurabilă	9
Nașterea numerelor iraționalelor: un secret și un scandal	13
<i>Incommensurabilitatea numărului de aur</i>	16
Demonstrații de iraționalitate	19
<i>Demonstrații fără cuvinte</i>	22
Criză și salvare	24
<i>Un matematician puțin cunoscut: Eudoxus din Knidos</i>	26

Capitolul 1

Numere iraționale	29
Descoperind alte numere iraționale:	
funcțiile trigonometrice și logaritmii	31
<i>Teeteto</i>	32
Iraționalitatea numărului e	35
Iraționalitatea numărului π	38
Construcția numerelor reale	42
<i>Constanta lui Apéry</i>	44
Structura numerelor iraționale	49
Câte numere iraționale există?	52
Alege un număr la întâmplare	55

Capitolul 2**Algebrice versus transcendente** 61

Hermite demonstrează că e este transcendent
și Lindemann reușește pentru π 63

După multe milenii, am renunțat la cuadratura cercurilor 66

Capitolul 3**Fracții continue** 71

Algoritmul lui Euclid 79

Convergente 81

O pentagramă plină de fracții continue 82

Planetariul mecanic al lui de Huygens 86

Problema naufragațiilor, nucile de cocos și maimuțele 88

Numărul cel mai irațional dintre iraționale 90

Fracții continue de constante faimoase 92

Numerele iraționale pătratice 94

Constantele lui Khinchin și Lévy 98

Capitolul 4**Copacul lui Farey și fructele sale iraționale** 101

Fracțiile lui Farey 102

Drumuri în arborele lui Farey 104

Cercurile lui Ford 106

Arborele lui Stern-Brocot 111

Fructele iraționale 112

Revenire la problema *The Ladies' Diary* 114

Capitolul 5

Un epilog normal	117
------------------	-----

<i>Tabelul 3. Primele o mie de zecimale ale lui π în grupuri de 50 de cifre pe fiecare rând</i>	119
--	-----

<i>Cinci moduri de a deveni faimos în toată lumea datorită numerelor iraționale</i>	120
---	-----

Nu știm dacă π este normal	120
--------------------------------	-----

Anexe	123
-------	-----

1. Variațiuni despre o temă incommensurabilă	123
--	-----

2. Demonstrația iraționalității lui π	127
---	-----

3. Demonstrații ale transcendenței numerelor e și π	131
---	-----

<i>Transcendența lui e</i>	132
---	-----

<i>Transcendența lui π</i>	135
---	-----

Bibliografia recomandată	137
--------------------------	-----

Capitolul 0

O criză incommensurabilă

„Nu merită să se numească om cel care nu știe că
diagonala unui pătrat este incommensurabilă față de latură.”

(Sophie Germain)

Nașterea matematicii, în înțelesul său modern, este asociată de obicei cu școala pitagoreică din secolul al V-lea î.Hr. Aforismul *totul este număr*, al filozofului și matematicianului grec Pitagora (569-475 î.Hr.) rezumă filozofia școlii și de atunci încoace constituie nucleul științei moderne: putem descifra legile universului grație matematicii. Pitagoreicii vorbeau de cosmos pentru a se referi la ordinea pe care o găsim în natura și care se dovedește accesibilă intelectului nostru. Armonia universului se putea înțelege prin raporturi de numere întregi și legile sale erau guvernate de astfel de numere și proporții.

Pitagora, contemporan cu Lao-Zi, Confucius și Buddha, este considerat primul matematician pur din istorie. În mod surprinzător, datorită teoremei lui Pitagora, pe care o învățăm la școală, este și unul dintre matematicienii cei mai populari de astăzi. Căutarea «Pythagoras» pe Google returnează peste șapte milioane de intrări care fac să pălească jumătatea de milion a lui Andrew Wiles, matematicianul care a demonstrat teorema lui Fermat. După cum comentează matematicianul Pedro Miguel González Urbaneja în cartea sa *Pitagora, filozoful numărului*, „Pitagora este probabil cel mai cunoscut matematician, dar este renumit și în domeniul mai general al istoriei culturii.

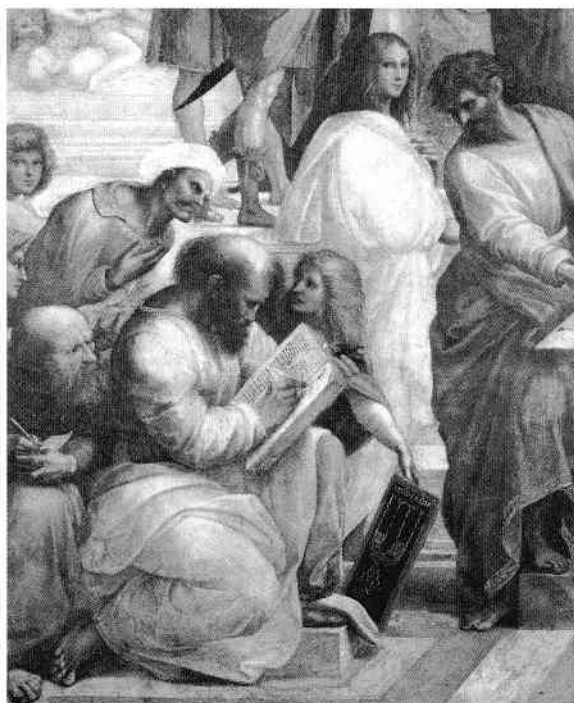


Figura 1. Detaliu din
Școala din Atena
în care îl putem vedea
pe Pitagora cufundat
în studiu.

Figura sa este una dintre cele mai fascinante și interesante din istoria gândirii. Raționalist și mistic, filozof și teolog, matematician și experimentator, om în carne și oase și personaj mitic; Pitagora a impulsionat o parte considerabilă a elementelor culturale care au modelat tradiția gândirii occidentale“.

Se pare că Pitagora a fost primul care a dedus că Pământul este o sferă și care a descoperit că luceafărul de dimineață și cel de seară erau același astru: Venus. A definit numerele pare și impare și a introdus în Grecia primul sistem comun de măsuri și greutate. Dar, cum se întâmplă cu alte personaje mitice din istorie, niciuna dintre afirmațiile de mai sus nu se poate demonstra în mod convingător, ba chiar și existența personajului a fost pusă la îndoială. De fapt, există îndoieli chiar și în privința paternității celebrei teoreme care îi poartă numele.

Figura 2. *Pădurea elementelor*, tablou de Tobia Ravà.

Acest pictor italian este urmașul vechii școli pitagoreice, filtrată prin tradiția ebraică a gematriei, conform căreia totul este număr. Opera sa ilustrează această concepție în imagini.



Pitagora a fugit din Samos, insula sa natală din Grecia de astăzi, din cauza neînțelegerilor cu tiranul Policrate și a fondat în Crotona, în sudul Italiei de astăzi, o școală în care a predat și a făcut celebră filozofia sa matematică: „Numărul este regula formelor și a ideilor”. În școala lui Pitagora, în care erau admiși bărbați și femei de orice rasă, religie sau pătură socială, discipolii de gradul întâi, numiți *akusmaticos* (*ascultători*), învățau cinci ani doctrina pitagoreică. În această perioadă de formare le era interzis să își vadă maestrul. Cei mai merituoși treceau la ciclul al doilea, în care dobândeau cunoștințe mai aprofundate de filozofie și de matematică; atunci li se permitea să discute cu Pitagora și erau numiți *matematicos* (*cunoscători*).

Membrii frăției pitagoreice trebuia să se supună unei întregi serii de ritualuri absurde: să atingă apa când tuna, să nu poarte inele, să nu

urineze în direcția soarelui, să nu rădă niciodată, să întindă cuvertura patului, să se îmbrace în alb, să rămână caști... Și, ca să încheiem, deși erau total vegetarieni, nu puteau mânca fasole (se pare că Pitagora o detesta). De fapt, o legendă foarte răspândită spune că fasolea a stat în spatele morții maestrului: când locuitorii din Crotona au văzut că toate funcțiile politice erau ocupate de către pitagoricieni, au atacat școala și au incendiat-o. Pitagora a încercat să scape din încăierare fugind, dar un câmp de fasole i-a apărut în față. Decât să treacă prin ea, a preferat să fie arestat și executat. În viziunea noastră modernă, școala lui Pitagora aduce mai mult cu o sectă religioasă decât cu o școală.

Matematica era pentru frații pitagoreici o religie și depuneau jurământ să păstreze în secret cunoștințele acumulate. Credeau că numerele simbolizează calități mistice; astfel, 1 reprezenta binele, pe lângă esența și fundamentul a tot ceea ce există, 2 masculinul, 3 femininul... Pentru aceștia, solidele obișnuite reprezentau elemente a căror combinație forma întreaga diversitate materială a naturii. Doctrina pitagoreică însă, fiind un soi de misticism numeric, nu doar că atribuia numerelor un caracter sacru, ci și capacitatea de a desluși ordinea ascunsă a lumii, lucru extraordinar de modern pentru noi, ilustrat în cuvintele lui Philolaus din Metapontum (470-380 î.Hr.), adept al lui Pitagora: „Tot ceea ce este cognoscibil are un număr, deoarece fără număr nimic un poate fi nici conceput, nici cunoscut“.

Pe lângă misticism și filozofie, frații pitagoreici au descoperit multe adevăruri matematice și au explorat formele în care acestea se manifestă în lume. În *Elementele* lui Euclid, tratat scris în jurul anului 300 î.Hr., găsim un volum imens de descoperiri matematice atribuite școlii pitagoreice, culminând cu geometria celor cinci solide platonice. Este vorba despre singurele cinci posibile corpuri regulate, adică cele care au toate fețele egale: tetraedrul, cubul, octaedrul, dodecaedrul și icosaedrul.

Nașterea numerelor iraționale: un secret și un scandal

„Se zice că divinitatea s-a supărat pe cel care a divulgat doctrina lui Pitagora și l-a făcut să piară ca un necredincios în mare, pentru sacrilegiul de a fi dezvăluit doctrina numerelor iraționale și incommensurabilitatea.” (Jâmblico. Vida Pitagórica. XXXIV, 247)

Pitagoricienii presupuneau că lumea era făcută din relații simple între numerele pe care le folosim la numărare. De aceea, s-a dovedit profund deranjant să descopere că existau numere, iraționalele, care nu puteau fi exprimate ca o relație de numere naturale.

Termenul *irațional* poate fi oarecum ciudat în contextul matematicii, în care se presupune că totul este condus de rațiune. În limbajul cotidian îl folosim pentru a indica lipsa raționamentului, însă, desigur, acest lucru nu înseamnă să considerăm că numerele iraționale sunt ilogice.

Pitagoreicii foloseau doar numere raționale. Cuvântul *rațional* nu face referire la rațiune, ci la raportul a două numere întregi, prin urmare, cuvântul irațional se referă la absența unui astfel de raport. Echivalentul geometric al termenului *rațional* era *comensurabil*, pe care îl folosim încă pentru a descrie două lungimi al căror raport este un număr rațional. Două lungimi sunt comensurabile dacă una dintre ele poate fi împărțită în k părți egale sau unități, astfel încât cea de-a doua lungime să fie, de asemenea, un multiplu exact al unității respective.

Cu toate acestea, dacă segmentele sunt de așa natură încât raportul lungimilor este irațional, atunci este imposibil de găsit o astfel de unitate. În acest caz se spune că segmentele sunt incommensurabile.

La prima vedere, poate părea că irațional și incommensurabil sunt doi termeni distincți. Primul termen, *irațional*, se referă la imposibilitatea de a reprezenta un număr ca un raport a două numere întregi; este o problemă de aritmetică.



Figura 3. Medalion medieval cu pentagrama mistică pitagorică.

Al doilea termen, *incomensurabil*, referitor la două segmente, ne spune despre imposibilitatea geometrică de a găsi un al treilea segment, mai mic decât cele două, care să se cuprindă de un număr întreg de ori în ambele segmente. În primul caz spunem că numărul nostru irațional x nu poate fi exprimat ca și raport a două numere întregi a și b . Cu alte cuvinte, că nu este posibil să se găsească o expresie ca $x = a/b$. În caz geometric, spunem că două segmente, unul de lungime x și altul de lungime y , sunt incomensurabile dacă nu putem găsi un segment de lungime u care să se cuprindă în ambele de un număr întreg de ori. Fără a pierde din vedere generalitatea, să luăm lungimea y egală cu 1. Dacă există asemenea segment de lungime u , atunci $x/u = a$, ceea ce înseamnă că u se cuprinde exact de a ori în x . Și, la rândul său rezultă că $1/u = b$, ceea ce înseamnă că u se cuprinde de b ori în 1. În acest caz, însă: $x = au$ și $u = 1/b$, astfel încât $x = au = a/b$, care este echivalentă cu propoziția aritmetică.

În opera sa *Mysterium Cosmographicum*, Johannes Kepler (1571-1630) scrie că: „Geometria are două mari comori: una este teorema lui Pitagora și cealaltă este secțiunea de aur; dacă prima este o bijuterie de aur, cea de-a doua este un diamant”. În mod ironic, bijuteriile s-au dovedit a fi cai troieni, pentru că descoperirea neașteptatelor mărimi incomensurabile a pornit din teorema lui Pitagora sau din pentagrama mistică a lui Pitagora. Pornind de la teorema lui Pitagora, a apărut $\sqrt{2}$ și din pentagramă, ca raport între diagonală și latura pentagonului regulat, a rezultat alt renumit număr irațional, numărul de aur $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$.

Să privim în detaliu cazul lui $\sqrt{2}$. Pitagoreicii au demonstrat că lungimea diagonalei unui pătrat cu latura 1, $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, nu se poate exprima ca raport de două numere întregi a/b , ca un număr rațional. Cum au făcut demonstrația? Probabil nu vom ști niciodată cu siguranță, dar în literatura de specialitate se obișnuiește să se demonstreze clasic prin reducere la absurd. Această metodă de demonstrație pornește de la o afirmație care ne conduce în final la un rezultat absurd sau contradictoriu, ceea ce înseamnă că afirmația

inițială era greșită. Să vedem: orice număr rațional se poate scrie ca o fracție ireductibilă a/b , unde a și b sunt numere întregi fără factor comun. Este $\sqrt{2}$ număr rațional? Să presupunem că da. Atunci putem să-l exprimăm ca o fracție ireductibilă: $\sqrt{2} = a/b$. Ridicând la pătrat ambii termeni ai egalității: $a^2 = 2b^2$, deducem că a^2 este un număr natural par. Să observăm acum că, dacă a ar fi impar, a^2 ar fi impar; deci, neapărat, a trebuie să fie par. Putem scrie atunci că $a = 2p$, unde p va fi un număr natural. Înlocuind această informație în $a^2 = 2b^2$, ajungem la identitatea $2p^2 = b^2$. Și, din nou, cum b^2 este un număr întreg par, b este par. Astfel, am ajuns la o contradicție, pentru că atât a cât și b sunt numere pare, dar am presupus că nu aveau factor comun. Am demonstrat prin reducere la absurd că ipoteza inițială este incorectă. Nu ne mai rămâne decât să tragem concluzia că $\sqrt{2}$ nu se poate scrie ca o fracție de numere naturale.

Pitagoreicii nu concepeau alte numere decât cele raționale, care se pliau perfect pe viziunea lor asupra lumii; prin urmare, descoperirea naturii iraționale $\sqrt{2}$ a pus sub semnul întrebării întreg programul lor filozofico-matematic. Nu cunoaștem cu adevărat identitatea autorului afurisitelor mărimi incommensurabile, dar se admite de obicei că descoperirea a avut loc spre anul 480 î.Hr. de către pitagoreicul nonconformist Hipaso de Metaponto (sec. VI – V î.Hr.) la care s-ar părea că face referire filozoful Proclus (412-485 d.Hr.) când scrie: „Este de notorietate că primul care a dat domeniului public teoria numerelor iraționale ar fi pierit într-un naufragiu, deoarece inexprimabilul și inimaginabilul ar fi trebuit să rămână secrete. Prin urmare, vinovatul, care din întâmplare a abordat și dezvăluit acest aspect al lucrurilor vii, a fost transferat în locul său de origine, unde este biciuit de valuri pentru eternitate”. Descoperirea,



Figura 4. Portretul lui Hipaso de Metaponto într-o gravură din secolul al XIX-lea

INCOMENSURABILITATEA NUMĂRULUI DE AUR

După istoricii matematicii, nu este sigur că $\sqrt{2}$ ar fi primul număr irațional descoperit: câțiva înclină spre $\sqrt{5}$, care rezultă firesc din celebra pentagramă mistică pitagoreică reprezentată în imaginea din figura 5, în care putem găsi secțiunea de aur.

Euclid prezintă astfel secțiunea de aur în tratatul *Elemente*: „Se zice că un segment este împărțit în raport mediu și extrem când segmentul total este față de partea cea mai mare așa cum partea mai mare este față de cea mai mică”. Cu alte cuvinte, pe înțelesul tuturor, dacă împărțim un segment de o unitate ca lungime în două segmente de lungime x și $1/x$, raportul de aur trebuie să satisfacă egalitatea: $1/x = x/(1/x)$, în care x este numit numărul de aur sau numărul auriu, care, în mod tradițional, este notat cu litera φ . Făcând calculele, rezultă că ecuația precedentă este echivalentă cu $\varphi^2 - \varphi = 1$, a cărei soluție este $\varphi = (\sqrt{5} + 1) / 2$.

Este ușor de demonstrat caracterul irațional al lui φ , aplicând aceeași metodă de reducere la absurd pe care o folosim pentru $\sqrt{2}$. Să presupunem că $\varphi = p/q$, unde fracția este ireductibilă. Deoarece φ este soluția ecuației $\varphi^2 - \varphi = 1$, și fracția p/q o va satisface. Înlocuind în ecuație și simplificând, obținem că $p - q = q^2/p$, adică p divide pe q^2 . În acest caz, însă, p îl divide și pe q ; deci, ne aflăm într-o contradicție.

Demonstrația geometrică a incomensurabilității lui φ se bazează pe pentagrama mistică. În *Elemente* se poate citi: „Diagonalele unui pentagon se intersectează în raportul de aur, în care segmentul cel mai mare este egal cu latura pentagonului”. Adică, raportul dintre lungimile uneia din diagonalele pentagonului, ca EB în imagine, și o latură ca AB, este φ , după cum

care s-a încercat să fie păstrată în secret din cauza amenințării pe care o reprezenta pentru întregul proiect pitagoreic, a ajuns să fie dezvăluită în cele din urmă și să se transforme într-un scandal matematic, așa cum descrie pe un ton apocaliptic filozoful grec

clitorul poate demonstra singur. Să presupunem că există o unitate, un segment de lungime fixă, cu care se poate măsura exact diagonala și latura. Să observăm că cele cinci diagonale ale unui pentagon regulat determină un al doilea pentagon regulat, mai mic (figura 5). Este ușor de demonstrat că lungimea diagonalei $C'E'$ a noului pentagon este egală cu $EB - AB$ și că latura $C'D'$ este egală cu $2AB - EB$. Deci unitatea

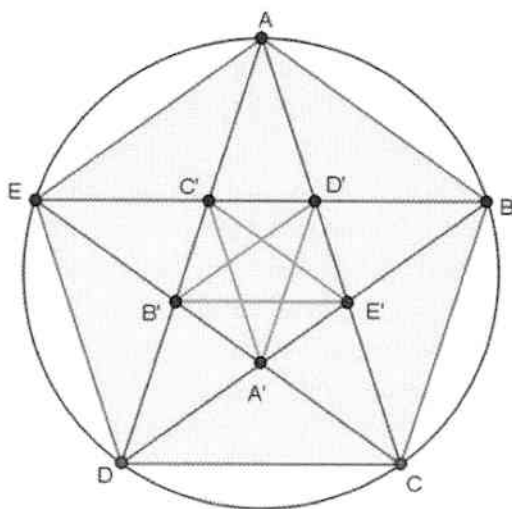


Figura 5.

noastră împarte exact și noua latură $C'D'$ și diagonala $C'E'$ a acestui pentagon mai mic, pentru că împarte exact atât pe EB , cât și pe AB . Cum se poate repeta la infinit procesul de obținere a unui pentagon atât de mic pe cât îl dorim, ajungem printr-un raționament de *descendență infinită* la ceva imposibil: putem obține diagonale și laturi mai mici decât unitatea însăși, care ar trebui să se cuprindă de un număr întreg de ori în ele. Așadar, nu există niciun segment de o asemenea lungime încât să se cuprindă în același timp de un număr întreg de ori în diagonala și în latura unui pentagon; cu alte cuvinte, aceste două segmente sunt incommensurabile.

Iamblichus de Chalcis (250-330 d. Hr.) în *Viața lui Pitagora*: „Se zice că primul care a dezvăluit natura măsurabilității și incommensurabilității celor nedemni de a lua parte la astfel de cunoștințe, a fost detestat într-atât încât nu doar că l-au dat afară din viața și din locuința comună,

ci i-au făcut și un mormânt, ca și cum el, care odată le-a fost camarad, ar fi abandonat viața între oameni.[...] Alții afirmă că divinitatea s-a supărat pe cel care a divulgat doctrina lui Pitagora și l-ar fi pedepsit să moară ca un păcătos în mare pentru nelegiuirea de a fi destăinuit teoria numerelor iraționale și a incomensurabilității“.

Dincolo de scandal, apariția mărimilor incomensurabile a însemnat cu siguranță un moment de cotitură în matematica greacă: pe lângă că a aruncat în aer mistica pitagoreică și a făcut imposibilă pentru geometrie să măsoare întotdeauna exact, a obligat matematicienii să folosească demonstrația ca ghid în cercetările lor. În realitate, scandalul numerelor iraționale a pus capăt perioadei de pubertate a matematicii. Potrivit lui Pedro Miguel González, „ideea că două mărimi, mai concret două segmente, au întotdeauna o parte alicotă comună, adică sunt măsurabile, este fără îndoială un stadiu incipient inevitabil în dezvoltarea gândirii matematicii intuitive, atât în plan istoric, cât și școlar și, bineînțeles, în domeniul meșteșugăresc, din nevoia de măsurare întotdeauna aproximativă a lungimilor“.

Descoperirea numerelor iraționale a avut implicații profunde în matematica greacă, provocând o tensiune între geometrie și aritmetică, între mărimi și numere. Grecii au ales să mențină mărimile incomensurabile și numerele iraționale separate, considerându-le lucruri complet distincte. Cuvântul grecesc pentru raport este *logos*, care înseamnă *cuvânt* sau *socoteală*. Noile mărimi incomensurabile au fost numite *alagon*, care are sensul de *inexprimabil*, *indescriptibil*. Mărimile iraționale sunt consecință logică a geometriei, dar se dovedesc inexprimabile prin numere ordinare, încât grecii au avut grijă să folosească cuvinte total diferite pentru a denumi un număr (în grecește *arithmos*) spre deosebire de o mărime (*megethos*). De fapt, a trebuit să treacă mai mult de 2200 de ani până când numerele iraționale au fost recunoscute ca numere cu drepturi depline. Radical din 2 a fost primul număr irațional care s-a descoperit (sau poate să fi fost radical din 5) în secolul al V-lea î.Hr. și până în secolul al XVII-lea nu s-a răspândit cuvântul *număr* pentru a desemna nu doar numerele raționale, ci și pe cele iraționale.

Demonstrații de iraționalitate

„[Demonstrația aristotelică a iraționalității lui $\sqrt{2}$] este o teoremă simplă, atât în idee, cât și în execuție, dar fără nicio îndoială este o teoremă de cel mai înalt nivel.

Păstrează prospețimea și semnificația din momentul descoperirii sale; cei mai bine de 2000 de ani care au trecut nu i-au umbrat deloc valoarea.” (G.H. Hardy, Apologia unui matematician)

Mulți am simțit în adolescența noastră, ca studenți, o impresie puternică când ni s-a prezentat pentru prima dată demonstrația iraționalității lui $\sqrt{2}$ prin reducere la absurd, la care se referă celebrul matematician Hardy în pasajul introductiv și despre care am pomenit deja în „Incomensurabilitatea numărului de aur”. După ce o cunoaște, studentul află că pot fi elaborate dovezi incontestabile despre adevărul sau falsitatea unei afirmații matematice. Ceva asemănător a trebuit să simtă frații pitagoreici și, de fapt, pentru matematică, cea mai mare contribuție a lor a fost conceptul demonstrației: ideea că este posibil să se construiască dovezi irefutabile ale unei propoziții matematice. În timp ce babilonienii și egiptenii au dezvoltat o matematică prin excelență practică și algoritmică, pitagoreicii au creat o nouă matematică, al cărei fundament a fost conceptul de demonstrație. Să vedem demonstrații alternative ale iraționalității lui $\sqrt{2}$. Să presupunem din nou că $\sqrt{2} = a/b$ în formă ireductibilă, sau ceea ce este același lucru, că $a^2 = 2b^2$. Teorema fundamentală a aritmeticii ne asigură că orice număr natural se poate descompune ca un produs unic de numere prime. Să presupunem că $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ este produsul a n numere prime și că $b = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_m$ este produsul a m numere prime. În descompunerea în factori primi ai lui a^2 vor fi n perechi de numere prime, iar în b^2 vor fi m perechi. Trebuia însă ca $a^2 = 2b^2$, și în $2b^2$ ne apare un 2 fără pereche. Am căzut din nou într-o contradicție și nu ne rămâne altă soluție decât să admitem că ipoteza noastră inițială era incorectă și că $\sqrt{2}$ nu poate fi scris ca o fracție de numere naturale.

Dacă ar trebui să optezi, dragă cititorule, între cele două demonstrații pe care ai alege-o? În lucrarea *The Mathematical Experience*, matematicienii P. J. Davis și R. Hersh scriu: „Nu încap